Evolución del concepto de función y límite funcional

UNIVERSIDAD DE GRANADA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

Lo más específico del Análisis Matemático son los procesos de convergencia, o procesos “de paso al límite”, que en él se consideran. Aquí nos vamos a ocupar solamente del concepto de límite funcional. Dicho concepto está estrechamente relacionado con los de función y de número real; y los tres juntos constituyen el núcleo del Análisis. Por ello, la historia de su evolución es también la del desarrollo del Cálculo, de los sucesivos intentos para fundamentarlo sobre bases lógicas rigurosas. Aislar en este proceso aquellos aspectos directamente relacionados con el concepto de límite funcional, conlleva una pérdida de perspectiva que, espero, quedará compensada cuando estudiemos la evolución de los conceptos de derivada, integral y convergencia de series.

La teoría de las “razones últimas” de Newton

En las matemáticas de la Antigüedad no existía una idea de “límite” que pueda ser considerada como un precedente lejano de la actual. Lo más parecido era el método de exhausción empleado con maestría por Arquímedes para realizar diversas cuadraturas. Pero dicho método no consistía en un límite, sino que, precisamente, lo que hacía era evitarlo y sustituirlo por un esquema de razonamiento de doble reducción al absurdo, típico de las matemáticas griegas. La matemática Griega abomina del infinito y la idea de límite connota la de infinito. Es notable, sin embargo, que cuando los matemáticos Griegos tienen que enfrentarse al infinito como, por ejemplo, Eudoxo al definir la igualdad de razones de magnitudes inconmensurables, lo que hace es basar su definición de *igualdad* en un álgebra de *desigualdades*.

La teoría de las “razones últimas” de Newton

En las matemáticas de la Antigüedad no existía una idea de “límite” que pueda ser considerada como un precedente lejano de la actual. Lo más parecido era el método de exhausción empleado con maestría por Arquímedes para realizar diversas cuadraturas. Pero dicho método no consistía en un límite, sino que, precisamente, lo que hacía era evitarlo y sustituirlo por un esquema de razonamiento de doble reducción al absurdo, típico de las matemáticas griegas. La matemática Griega abomina del infinito y la idea de límite connota la de infinito. Es notable, sin embargo, que cuando los matemáticos Griegos tienen que enfrentarse al infinito como, por ejemplo, Eudoxo al definir la igualdad de razones de magnitudes inconmensurables, lo que hace es basar su definición de *igualdad* en un álgebra de *desigualdades*.

Tenemos que llegar al siglo XVII, con la invención de las técnicas infinitesimales que preludian el descubrimiento del Cálculo, para encontrar las primeras referencias confusas de procesos de convergencia. El primer indicio del concepto de límite funcional aparece en estrecha relación con el cálculo de *fluxiones* (velocidades instantáneas) de Newton.

En su teoría de las “razones últimas” expuesta en *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687) se lee:

En su teoría de las “razones últimas” expuesta en *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687) se lee:

> *También puede alegarse que si las razones últimas de cantidades evanescentes son dadas, sus últimas magnitudes también serán dadas; y por tanto toda cantidad consistirá de indivisibles, en contra de lo que Euclides ha probado... Pero esta objeción está basada sobre una hipótesis falsa. Aquellas razones últimas con las que tales cantidades desaparecen no son en realidad razones de cantidades últimas, sino límites... a los que ellas pueden aproximarse tanto que su diferencia es menor que cualquier cantidad dada... Este asunto será entendido más claramente en el caso de cantidades indefinidamente grandes. Si dos cantidades cuya diferencia es dada son indefinidamente aumentadas, su última razón será dada, a saber, la razón de igualdad y, no obstante, las cantidades últimas o máximas de las cuales esta es la razón no serán por eso dadas.*

Lo que yo entiendo que quiere decir Newton es lo que sigue. La expresión "razones últimas de cantidades evanescentes" puede interpretarse como el límite de un cociente cuyo numerador y denominador tienen límite cero: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = L$, donde $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

Lo que yo entiendo que quiere decir Newton es lo que sigue. La expresión "razones últimas de cantidades evanescentes" puede interpretarse como el límite de un cociente cuyo numerador y denominador tienen límite cero: $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$, donde $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$.

En el primer párrafo, Newton dice que el hecho de que la razón última sea dada igual a L, no quiere decir que el cociente de las últimas magnitudes, $\frac{f(a)}{g(a)}$, sea igual a L. De manera muy interesante, Newton relaciona esto con la estructura del continuo, pues la idea que expresa es que si el valor de todo límite se alcanza, entonces el continuo estaría formado por últimas partes indivisibles.

Lo que yo entiendo que quiere decir Newton es lo que sigue. La expresión "razones últimas de cantidades evanescentes" puede interpretarse como el límite de un cociente cuyo numerador y denominador tienen límite cero: $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$, donde $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

En el primer párrafo, Newton dice que el hecho de que la razón última sea dada igual a L, no quiere decir que el cociente de las últimas magnitudes, $\frac{f(a)}{g(a)}$, sea igual a L. De manera muy interesante, Newton relaciona esto con la estructura del continuo, pues la idea que expresa es que si el valor de todo límite se alcanza, entonces el continuo estaría formado por últimas partes indivisibles.

En el segundo párrafo, además de insistir en la idea anterior, queda claro que por "razones últimas" Newton entendía algo muy parecido a nuestra idea actual de límite.

Finalmente, Newton propone un ejemplo excelente; consideremos, dice, dos cantidades $f(x)$ y $g(x)$ cuya diferencia está dada, $f(x) - g(x) = \alpha \neq 0$, y tales que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$, en tal caso tendremos que su razón última será de igualdad, esto es, $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ y está claro que para ningún valor de x es $\frac{f(x)}{g(x)} = 1$ y que tampoco las magnitudes $f(x)$ y $g(x)$ tienen un último valor.

Finalmente, Newton propone un ejemplo excelente; consideremos, dice, dos cantidades $f(x)$ y $g(x)$ cuya diferencia está dada, $f(x) - g(x) = \alpha \neq 0$, y tales que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = +\infty$, en tal caso tendremos que su razón última será de igualdad, esto es, $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ y está claro que para ningún valor de x es $\frac{f(x)}{g(x)} = 1$ y que tampoco las magnitudes $f(x)$ y $g(x)$ tienen un último valor.

Además, Newton considera que los infinitésimos no son cantidades fijas y, en los *Principia*, advierte a sus lectores que cuando hable de cantidades mínimas, o evanescentes, o de cantidades últimas, éstas no debieran entenderse como cantidades fijas que tienen un determinado valor, sino como cantidades que fueran indefinidamente disminuidas.

El desarrollo de la geometría analítica llevó a la introducción de variables continuas y a un punto de vista dinámico entre sus relaciones las cuales se expresaban por medio de ecuaciones. Una ecuación no es una función, por eso el Cálculo de Newton y Leibniz no es un cálculo de funciones. En el primer libro de Cálculo *Analyse des infiniment petits, pour líntelligence des lignes courbes* (L'Hôpital, 1696), como ya se indica en su propio título, lo que se estudia son curvas, no funciones. Las variables asociadas a una curva eran de tipo geométrico: tangentes, subtangentes, normales, radio de curvatura. . . , y no se establecía una relación de dependencia de unas variables (dependientes) con respecto a otras variables (libres).

El desarrollo de la geometría analítica llevó a la introducción de variables continuas y a un punto de vista dinámico entre sus relaciones las cuales se expresaban por medio de ecuaciones. Una ecuación no es una función, por eso el Cálculo de Newton y Leibniz no es un cálculo de funciones. En el primer libro de Cálculo *Analyse des infiniment petits, pour líntelligence des lignes courbes* (L'Hôpital, 1696), como ya se indica en su propio título, lo que se estudia son curvas, no funciones. Las variables asociadas a una curva eran de tipo geométrico: tangentes, subtangentes, normales, radio de curvatura…, y no se establecía una relación de dependencia de unas variables (dependientes) con respecto a otras variables (libres).

El método de fluxiones de Newton se aplica a *fluentes* (que sugiere la idea geométrica de un punto que "fluye" a lo largo de una curva), no a funciones. La principal contribución de Newton al desarrollo del concepto de función fue su uso de las series de potencias.

En 1692, Leibniz introdujo el término “función” para designar un objeto geométrico asociado con una curva. Por ejemplo, Leibniz afirmaba que “una tangente es función de una curva”. Al mismo tiempo generalizó el uso de los términos “constante”, “variable”, “coordenadas” y “‘parámentro”. La carencia de un término específico para representar cantidades que dependen de otras cantidades en las ecuaciones que las relacionan dio lugar al uso del término “función” tal como aparece en la definición dada por Johann Bernoulli en 1718:

En 1692, Leibniz introdujo el término “función” para designar un objeto geométrico asociado con una curva. Por ejemplo, Leibniz afirmaba que “una tangente es función de una curva”. Al mismo tiempo generalizó el uso de los términos “constante”, “variable”, “coordenadas” y “‘parámentro”. La carencia de un término específico para representar cantidades que dependen de otras cantidades en las ecuaciones que las relacionan dio lugar al uso del término “función” tal como aparece en la definición dada por Johann Bernoulli en 1718:

> *Llamo función de una magnitud variable a una cantidad compuesta de cualquier manera a partir de esta magnitud variable y de constantes.*

El siguiente importante avance en el concepto de función fue debido al gran Leonhard Euler, discípulo de Johann Bernoulli. En el Capítulo I del Volumen I de su *Introductio in analysin infinitorum*, publicado en 1748, Euler hace un estudio detallado del concepto de función. Empieza definiendo lo que entiende por “constante” y “variable”. Una constante es una cantidad definida que representa siempre uno y el mismo valor. Pero

> *Una cantidad variable es una indeterminada o cantidad universal que puede tomar por ella misma absolutamente todos los valores determinados.*

El siguiente importante avance en el concepto de función fue debido al gran Leonhard Euler, discípulo de Johann Bernoulli. En el Capítulo I del Volumen I de su *Introductio in analysin infinitorum*, publicado en 1748, Euler hace un estudio detallado del concepto de función. Empieza definiendo lo que entiende por "constante" y "variable". Una constante es una cantidad definida que representa siempre uno y el mismo valor. Pero

> *Una cantidad variable es una indeterminada o cantidad universal que puede tomar por ella misma absolutamente todos los valores determinados.*

Para Euler una variable puede tomar cualquier valor numérico, positivo o negativo, racional o irracional, y explícitamente escribe: *Quin etiam cyphra et numeri imaginarii a significatu quantitatis varabilis non excluduntur*, esto es, no se excluyen ni el cero ni los números imaginarios del significado de una cantidad variable.

Siguiendo a su maestro, Euler da la siguiente definición de función:

> *Una función de una cantidad variable es cualquier expresión analítica formada a partir de dicha cantidad variable y números o cantidades constantes.*

Siguiendo a su maestro, Euler da la siguiente definición de función:

> *Una función de una cantidad variable es cualquier expresión analítica formada a partir de dicha cantidad variable y números o cantidades constantes.*

La diferencia con la definición de J. Bernoulli está en el término “expresión analítica”. Después de dar esta definición, Euler distingue entre varios tipos de funciones según que puedan o no representarse por medio de una sola expresión analítica. También fue Euler quien usó por primera vez la notación $f(x)$ para indicar el valor de una función f en un valor x de la variable. Euler no precisaba lo que entendía por “cualquier expresión analítica” pero, sin duda, incluía las series, fracciones continuas y productos infinitos y primitivas. El concepto de función de Euler incluía tanto funciones “explícitas” como “implícitas”. Estas últimas aparecen en la resolución de ecuaciones algebraicas.

Figura. Euler

El libro de Euler *Introductio in analysin infinitorum* es considerado como el tercero más influyente en toda la historia de las matemáticas (el primero serían los *Elementos* de Euclides (300 adC) y el segundo los *Principia* (1687) de Newton) y tuvo una amplia difusión. En el prefacio de dicho libro, Euler, afirmaba que el Análisis Matemático es la ciencia general de las variables y sus funciones.

Esto, que hoy día nos parece una evidencia, estaba muy lejos de serlo en el siglo XVIII. De hecho, matemáticos como Newton, Leibniz, los hermanos Bernoulli y otros muchos en los siglos XVII y XVIII, se expresaban en términos de curvas, superficies, áreas, líneas tangentes.

En el Capítulo IV de su *Introductio*, afirma Euler que la forma más conveniente de expresión analítica para representar una función es por medio de una serie de potencias del tipo

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \dots$$

Puesto que la mayoría de funciones consideradas en esta época eran analíticas salvo en algunos puntos aislados de su dominio, esta afirmación de Euler era esencialmente correcta y fue aceptada por muchos matemáticos. De esta forma la definición de función dada por Euler se concretó en la práctica en el actual concepto de función analítica. De hecho, estas son las únicas funciones estudiadas en el Volumen I de la *Introductio*. En el Volumen II, dedicado al estudio de las curvas planas, Euler hace una distinción entre *curvas continuas* y *discontinuas*, las primeras son aquellas que vienen dadas por una única expresión analítica, las segundas se corresponden con lo que hoy entendemos por función analítica definida a trozos. Este uso tan particular de los términos “continuo” y “discontinuo” dio lugar a muchas confusiones.

La necesidad de precisar el concepto de función surgió poco después, de forma muy natural, en el estudio de las vibraciones planas de una cuerda elástica tensa, sujeta por sus extremos, cuya posición inicial en el plano viene dada por una función conocida $\psi(x)$. D'Alembert (1749) y Euler (1750) obtuvieron esencialmente la misma solución, pero discreparon sobre el tipo de función inicial $\psi(x)$ permitida. Mientras que, según D'Alembert, la posición inicial debía venir dada por una función suave (derivable dos veces), Euler insistía en que la evidencia física imponía la consideración de funciones más generales (no derivables, con picos). Él mismo propuso como posición inicial de la cuerda una línea poligonal. Otro matemático, Daniel Bernoulli, propuso en 1753 una solución del problema que tenía como consecuencia que la función $\psi(x)$ podía representarse como suma de una serie trigonométrica infinita. Una situación muy similar a ésta se produjo unos años después, en 1822, como consecuencia de los trabajos de Jean B. Joseph Fourier sobre la propagación del calor.

Los detalles de toda esta historia son muy interesantes pero imposibles de resumir en unas pocas líneas. Volveremos sobre ellos más adelante. En esencia, se trata de lo siguiente. En la segunda mitad del siglo XVIII y primera del XIX, al mismo tiempo que los matemáticos seguían considerando que las funciones debían ser continuas y derivables, salvo a lo sumo en una cantidad finita de “puntos especiales” (el mismo Euler tenía esta idea), se estaban desarrollando métodos para resolver problemas cada vez más complejos que permitían representar “funciones cualesquiera” por medio de expresiones analíticas, principalmente, series de Fourier. Se suponía que una representación de este tipo debía “transmitir su regularidad” a la función representada pero, por otra parte, ésta podía ser muy general. El corazón del problema estaba en la confusión de dos conceptos, aparentemente iguales pero muy distintos de hecho, el de función y el de su representación analítica.

Los detalles de toda esta historia son muy interesantes pero imposibles de resumir en unas pocas líneas. Volveremos sobre ellos más adelante. En esencia, se trata de lo siguiente. En la segunda mitad del siglo XVIII y primera del XIX, al mismo tiempo que los matemáticos seguían considerando que las funciones debían ser continuas y derivables, salvo a lo sumo en una cantidad finita de "puntos especiales" (el mismo Euler tenía esta idea), se estaban desarrollando métodos para resolver problemas cada vez más complejos que permitían representar "funciones cualesquiera" por medio de expresiones analíticas, principalmente, series de Fourier. Se suponía que una representación de este tipo debía "transmitir su regularidad" a la función representada pero, por otra parte, ésta podía ser muy general. El corazón del problema estaba en la confusión de dos conceptos, aparentemente iguales pero muy distintos de hecho, el de función y el de su representación analítica.

La separación de estos conceptos llevó a considerar una función con independencia de su representación analítica. De esta forma una función quedaba reducida a un conjunto de valores numéricos completamente independientes asociados a una o varias variables, que es la idea subyacente a la definición moderna debida a Dirichlet (1837):

Los detalles de toda esta historia son muy interesantes pero imposibles de resumir en unas pocas líneas. Volveremos sobre ellos más adelante. En esencia, se trata de lo siguiente. En la segunda mitad del siglo XVIII y primera del XIX, al mismo tiempo que los matemáticos seguían considerando que las funciones debían ser continuas y derivables, salvo a lo sumo en una cantidad finita de "puntos especiales" (el mismo Euler tenía esta idea), se estaban desarrollando métodos para resolver problemas cada vez más complejos que permitían representar "funciones cualesquiera" por medio de expresiones analíticas, principalmente, series de Fourier. Se suponía que una representación de este tipo debía "transmitir su regularidad" a la función representada pero, por otra parte, ésta podía ser muy general. El corazón del problema estaba en la confusión de dos conceptos, aparentemente iguales pero muy distintos de hecho, el de función y el de su representación analítica.

La separación de estos conceptos llevó a considerar una función con independencia de su representación analítica. De esta forma una función quedaba reducida a un conjunto de valores numéricos completamente independientes asociados a una o varias variables, que es la idea subyacente a la definición moderna debida a Dirichlet (1837):

> *"y es una función de una variable x, definida en un intervalo $a < x < b$, si para cada valor de la variable x en este intervalo le corresponde un valor concreto de la variable y. Además, es irrelevante la forma en la que esta correspondencia se establezca."*

Figura. Dirichlet

Esta nueva idea de función llevó a investigar nuevos tipos de funciones que, con frecuencia, tenían un comportamiento inusual. En 1854 Riemann dio un ejemplo de función integrable con infinitas discontinuidades en todo intervalo de longitud positiva. En 1872 Weierstrass sorprende a la comunidad matemática con una función continua que no es derivable en ningún punto. A estos ejemplos de funciones "patológicas" pronto les siguen otros. En el siglo XIX la necesidad de una fundamentación rigurosa del Análisis Matemático se hace evidente. El concepto de función sigue en el centro de atención y, aunque dicho concepto siguió discutiéndose casi hasta el final del siglo, hoy se reconoce a Dirichlet haber sido el primero en considerar seriamente la idea de función como una "correspondencia arbitraria".

La *metafísica del Cálculo* en D'Alembert y Lagrange

Figura. D'Alembert

Durante el siglo XVIII, por una parte, el uso permanente de los infinitesimales dificultaba la comprensión de los procesos de paso al límite y, por otra parte, el recién inventado Cálculo era una herramienta maravillosa para estudiar y formular matemáticamente multitud de fenómenos naturales. Además, los resultados obtenidos eran correctos, por tanto no había por qué preocuparse mucho de la coherencia lógica de los fundamentos, ya habría tiempo para ello más adelante.

Debemos destacar, no obstante, la propuesta de Jean le Rond D'Alembert (1717 - 1783) de fundamentar el Cálculo sobre el concepto de límite: *"La théorie des limites est la base de la vraie Métaphysique du calcul différentiel"*.

D'Alembert redactó la mayoría de los artículos de matemáticas y ciencias para la obra inmortal del Siglo de las Luces la *Encyclopédie, ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers* (1751 - 65). En el artículo Différentiele (1754), después de criticar la "metafísica del infinito" de Leibniz, escribe:

D'Alembert redactó la mayoría de los artículos de matemáticas y ciencias para la obra inmortal del Siglo de las Luces la *Encyclopédie, ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers* (1751 - 65). En el artículo Différentiele (1754), después de criticar la "metafísica del infinito" de Leibniz, escribe:

> *Newton partía de otro principio; y se puede decir que la metafísica de este gran geómetra sobre el cálculo de fluxiones es muy exacta y luminosa, aunque solamente la ha dejado entrever. Él no ha considerado nunca el cálculo diferencial como el cálculo de cantidades infinitamente pequeñas, sino como el método de las primeras y últimas razones, es decir, el método para hallar los límites de las razones.*
> *[. . .] La suposición que se hace de las cantidades infinitamente pequeñas sólo sirve para acortar y simplificar los razonamientos; pero en el fondo el cálculo diferencial no precisa suponer la existencia de tales cantidades; y más aún, este cálculo consiste meramente en la determinación algebraica del límite de una razón.*

D’Alembert fue el primer matemático que afirmó haber probado que los infinitamente pequeños *“néxistent réellement ni dans la nature, ni dans les suppositions des Géomètres”*. Según D’Alembert:

> *Una cantidad es algo o nada; si es algo, aún no se ha desvanecido; si es nada, ya se ha desvanecido literalmente. La suposición de que hay un estado intermedio entre estos dos es una quimera.*

D'Alembert fue el primer matemático que afirmó haber probado que los infinitamente pequeños *"néxistent réellement ni dans la nature, ni dans les suppositions des Géomètres"*. Según D'Alembert:

> *Una cantidad es algo o nada; si es algo, aún no se ha desvanecido; si es nada, ya se ha desvanecido literalmente. La suposición de que hay un estado intermedio entre estos dos es una quimera.*

En el artículo *Limite* (1765), también escrito para la *Encyclopédie* junto con Jean-Baptiste de La Chapelle (1710 - 1792), se da la siguiente definición de límite:

> *Se dice que una magnitud es el límite de otra magnitud, cuando la segunda puede aproximarse a la primera, sin llegar nunca a excederla, en menos que cualquier cantidad dada tan pequeña como se quiera suponer.*

D’Alembert fue el primer matemático que afirmó haber probado que los infinitamente pequeños *“néxistent réellement ni dans la nature, ni dans les suppositions des Géomètres”*. Según D’Alembert:

> *Una cantidad es algo o nada; si es algo, aún no se ha desvanecido; si es nada, ya se ha desvanecido literalmente. La suposición de que hay un estado intermedio entre estos dos es una quimera.*

En el artículo *Limite* (1765), también escrito para la *Encyclopédie* junto con Jean-Baptiste de La Chapelle (1710 - 1792), se da la siguiente definición de límite:

> *Se dice que una magnitud es el límite de otra magnitud, cuando la segunda puede aproximarse a la primera, sin llegar nunca a excederla, en menos que cualquier cantidad dada tan pequeña como se quiera suponer.*

Este artículo también contiene los resultados sobre la unicidad del límite y sobre el límite del producto de dos magnitudes, por supuesto, enunciados retóricamente sin ningún tipo de símbolo para representar los límites.

El punto de vista de D'Alembert, esencialmente correcto, no era compartido por otros matemáticos, de forma destacada, por Joseph-Louis de Lagrange (1736 - 1813) quien en su obra *Théorie des fonctions analytiques* (1797), cuyo subtítulo era nada menos que *Les Principes du Calcul Différentiel, dégagés de toute considération dínfiniment petits, d'évanouissants, de limites et de fluxions, et réduits à lánalyse algébrique des quantités finies*, pretendió establecer una fundamentación algebraica del Cálculo, eliminando toda referencia a los infinitesimales y a los límites. Lagrange criticaba la teoría de las "últimas razones" de Newton y afirmaba:

El punto de vista de D'Alembert, esencialmente correcto, no era compartido por otros matemáticos, de forma destacada, por Joseph-Louis de Lagrange (1736 - 1813) quien en su obra *Théorie des fonctions analytiques* (1797), cuyo subtítulo era nada menos que *Les Principes du Calcul Différentiel, dégagés de toute considération dínfiniment petits, d'évanouissants, de limites et de fluxions, et réduits à lánalyse algébrique des quantités finies*, pretendió establecer una fundamentación algebraica del Cálculo, eliminando toda referencia a los infinitesimales y a los límites. Lagrange criticaba la teoría de las "últimas razones" de Newton y afirmaba:

> *Ese método tiene el gran inconveniente de considerar cantidades en el momento en que ellas cesan, por así decir, de ser cantidades; pues aunque siempre podemos concebir adecuadamente las razones de dos cantidades en tanto en cuanto ellas permanecen finitas, esa razón no ofrece a la mente ninguna idea clara y precisa tan pronto como sus términos ambos llegan a ser nada a la vez.*

Esta severa crítica va realmente dirigida contra Euler, quien concebía las cantidades infinitesimales como ceros exactos y, por tanto, un cociente de diferenciales lo interpretaba como $\frac{0}{0}$, expresión de la cual había que hallar en cada caso “su verdadero valor”.

Esta severa crítica va realmente dirigida contra Euler, quien concebía las cantidades infinitesimales como ceros exactos y, por tanto, un cociente de diferenciales lo interpretaba como $\frac{0}{0}$, expresión de la cual había que hallar en cada caso "su verdadero valor".

Lo llamativo es que la propuesta de Lagrange se basaba en los desarrollos en series de Taylor, considerados como una generalización del álgebra de polinomios, con lo que, de hecho, estaba usando la idea de límite que quería evitar.

Esta severa crítica va realmente dirigida contra Euler, quien concebía las cantidades infinitesimales como ceros exactos y, por tanto, un cociente de diferenciales lo interpretaba como $\frac{0}{0}$, expresión de la cual había que hallar en cada caso “su verdadero valor”.

Lo llamativo es que la propuesta de Lagrange se basaba en los desarrollos en series de Taylor, considerados como una generalización del álgebra de polinomios, con lo que, de hecho, estaba usando la idea de límite que quería evitar.

Por otra parte, es conocida la jactancia de Lagrange de que en su monumental *Mécanique analytique* (1772 - 1788) no había usado ni necesitado ninguna figura. Lagrange seguía así la tendencia, cada vez mayor, de separar el cálculo y la geometría. De hecho, Lagrange puede considerarse un “matemático puro”; su rechazo a la teoría de fluxiones se debe a que está basada en la idea de movimiento, que no es matemática, y su rechazo de los límites es debido a la confusa formulación de dicho concepto en su tiempo.

En 1784 la Academia de Berlin, cuyo director era Lagrange, anunció la convocatoria de un premio para “una teoría clara y precisa de lo que se llama el infinito en matemáticas”. El propósito de la Academia era eliminar el uso de los infinitesimales:

> *Es bien sabido que la geometría superior emplea regularmente lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño. . . La Academia, en consecuencia, desea una explicación de cómo es posible que se hayan conseguido deducir tantos teoremas correctos a partir de unos presupuestos contradictorios, así como. . . un principio verdaderamente matemático que pueda sustituir correctamente al del infinito.*

El premio fue concedido en 1786 a Simon-Antoine-Jean L'Huilier (1750 - 1840) por su ensayo *Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs* en el cual L'Huilier desarrollaba una teoría de límites. Su definición de límite es:

El premio fue concedido en 1786 a Simon-Antoine-Jean L'Huilier (1750 - 1840) por su ensayo *Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs* en el cual L'Huilier desarrollaba una teoría de límites. Su definición de límite es:

> *Sea una cantidad variable, siempre menor o siempre mayor que una propuesta cantidad constante; pero de la cual puede diferir menos que cualquier propuesta cantidad menor que ella misma: esta cantidad constante se dice que es el límite por exceso o por defecto de la cantidad variable.*

El premio fue concedido en 1786 a Simon-Antoine-Jean L'Huilier (1750 - 1840) por su ensayo *Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs* en el cual L'Huilier desarrollaba una teoría de límites. Su definición de límite es:

> *Sea una cantidad variable, siempre menor o siempre mayor que una propuesta cantidad constante; pero de la cual puede diferir menos que cualquier propuesta cantidad menor que ella misma: esta cantidad constante se dice que es el límite por exceso o por defecto de la cantidad variable.*

La novedad aquí está en los conceptos de "límite por exceso" y "límite por defecto". Al introducir esta distinción, L'Huilier observaba que hasta entonces no se había tenido en cuenta el hecho de que la aproximación al límite puede realizarse tanto desde una variable con valores crecientes como desde una variable con valores decrecientes. Por ello, L'Huilier introduce los conceptos de *límite por la derecha* y de *límite por la izquierda*.

El premio fue concedido en 1786 a Simon-Antoine-Jean L'Huilier (1750 - 1840) por su ensayo *Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs* en el cual L'Huilier desarrollaba una teoría de límites. Su definición de límite es:

> *Sea una cantidad variable, siempre menor o siempre mayor que una propuesta cantidad constante; pero de la cual puede diferir menos que cualquier propuesta cantidad menor que ella misma: esta cantidad constante se dice que es el límite por exceso o por defecto de la cantidad variable.*

La novedad aquí está en los conceptos de "límite por exceso" y "límite por defecto". Al introducir esta distinción, L'Huilier observaba que hasta entonces no se había tenido en cuenta el hecho de que la aproximación al límite puede realizarse tanto desde una variable con valores crecientes como desde una variable con valores decrecientes. Por ello, L'Huilier introduce los conceptos de *límite por la derecha* y de *límite por la izquierda*.

En esta obra es donde, por primera, se usa el símbolo "lím." (con el punto, como si fuera una abreviación de "límite") para representar el límite, aunque L'Huilier no lo hace de una forma regular.

Un ensayo de 100 páginas, titulado *Compendio da Theorica dos Limites, ou Introducçaõ ao Methodo das Fluxões*, fue publicado por la Academia de Ciencias de Lisboa en 1794, aunque su autor Francisco de Borja Garção Stockler (1759 - 1829) lo había presentado ya en 1791. La importancia de este ensayo es que contiene el primer intento de una presentación algebraica del concepto de límite. Stockler tenía un excelente conocimiento de la literatura matemática de su época, y en su libro se apoya precisamente en los autores que hemos citado anteriormente. Pero Stockler aventaja ampliamente a sus fuentes al separar el concepto de límite del concepto geométrico, algebraizándolo tanto para variables como para funciones. Además, es un pionero en el uso de desigualdades. Su definición de límite es la siguiente:

Un ensayo de 100 páginas, titulado *Compendio da Theorica dos Limites, ou Introducçaõ ao Methodo das Fluxões*, fue publicado por la Academia de Ciencias de Lisboa en 1794, aunque su autor Francisco de Borja Garção Stockler (1759 - 1829) lo había presentado ya en 1791. La importancia de este ensayo es que contiene el primer intento de una presentación algebraica del concepto de límite. Stockler tenía un excelente conocimiento de la literatura matemática de su época, y en su libro se apoya precisamente en los autores que hemos citado anteriormente. Pero Stockler aventaja ampliamente a sus fuentes al separar el concepto de límite del concepto geométrico, algebraizándolo tanto para variables como para funciones. Además, es un pionero en el uso de desigualdades. Su definición de límite es la siguiente:

> *Una cantidad constante es llamada "Límite" de una variable si la última puede ir aumentando o disminuyendo – aunque sus valores nunca lleguen a ser igual al de la constante – de tal forma que puede aproximar la constante tanto que la diferencia llega a ser menor que cualquier cantidad dada, por pequeña que esta pueda haber sido escogida.*

Un ensayo de 100 páginas, titulado *Compendio da Theorica dos Limites, ou Introducçaõ ao Methodo das Fluxões*, fue publicado por la Academia de Ciencias de Lisboa en 1794, aunque su autor Francisco de Borja Garção Stockler (1759 - 1829) lo había presentado ya en 1791. La importancia de este ensayo es que contiene el primer intento de una presentación algebraica del concepto de límite. Stockler tenía un excelente conocimiento de la literatura matemática de su época, y en su libro se apoya precisamente en los autores que hemos citado anteriormente. Pero Stockler aventaja ampliamente a sus fuentes al separar el concepto de límite del concepto geométrico, algebraizándolo tanto para variables como para funciones. Además, es un pionero en el uso de desigualdades. Su definición de límite es la siguiente:

> *Una cantidad constante es llamada “Límite” de una variable si la última puede ir aumentando o disminuyendo – aunque sus valores nunca lleguen a ser igual al de la constante – de tal forma que puede aproximar la constante tanto que la diferencia llega a ser menor que cualquier cantidad dada, por pequeña que esta pueda haber sido escogida.*

La definición es parecida a la de Martin, aunque hay un mayor énfasis en que el límite es un valor constante. Stockler también usa los conceptos de límites por la derecha y por la izquierda de L’Huilier.

Debemos notar que todas estas definiciones de límite que estamos dando se refieren a variables y que dichas variables suelen interpretarse como cantidades geométricas (áreas, longitudes de arco, medidas de ángulos, etc.). Además, una "cantidad constante" es interpretada generalmente como una cantidad positiva. Con frecuencia se considera que el cero tiene un carácter especial y se dan definiciones específicas para tenerlo en cuenta. Precisamente, eso es lo que hace Stockler introduciendo el concepto de *"variable sin límite de disminución"* con el significado de una variable con límite cero. De esta forma, también evita usar infinitésimos.

Debemos notar que todas estas definiciones de límite que estamos dando se refieren a variables y que dichas variables suelen interpretarse como cantidades geométricas (áreas, longitudes de arco, medidas de ángulos, etc.). Además, una "cantidad constante" es interpretada generalmente como una cantidad positiva. Con frecuencia se considera que el cero tiene un carácter especial y se dan definiciones específicas para tenerlo en cuenta. Precisamente, eso es lo que hace Stockler introduciendo el concepto de *"variable sin límite de disminución"* con el significado de una variable con límite cero. De esta forma, también evita usar infinitésimos.Stockler establece como un resultado fundamental que

> *Toda cantidad capaz de un límite, tiene necesariamente que ser igual a su límite, más o menos una cantidad variable sin límite de disminución.*

Debemos notar que todas estas definiciones de límite que estamos dando se refieren a variables y que dichas variables suelen interpretarse como cantidades geométricas (áreas, longitudes de arco, medidas de ángulos, etc.). Además, una “cantidad constante” es interpretada generalmente como una cantidad positiva. Con frecuencia se considera que el cero tiene un carácter especial y se dan definiciones específicas para tenerlo en cuenta. Precisamente, eso es lo que hace Stockler introduciendo el concepto de *“variable sin límite de disminución”* con el significado de una variable con límite cero. De esta forma, también evita usar infinitésimos.Stockler establece como un resultado fundamental que

> *Toda cantidad capaz de un límite, tiene necesariamente que ser igual a su límite, más o menos una cantidad variable sin límite de disminución.*

Stockler desarrolla todo un álgebra de límites y no se limita a las operaciones de suma, producto y cociente. He aquí una muestra:

> *Una potencia a^x, donde $a < 1$ es una constante y x una variable con valores positivos y sin límite de aumento, forma una sucesión nula.*

Stockler explica el uso del símbolo “Lim.” para representar límites y lo emplea de forma operativa para permutar límites. Por ejemplo, si $b = \mathrm{Lim.}\, x$ y a es constante, $\mathrm{Lim.}\,(a^x) = a^b$.

Stockler explica el uso del símbolo “Lim.” para representar límites y lo emplea de forma operativa para permutar límites. Por ejemplo, si $b = \mathrm{Lim.}\, x$ y a es constante, $\mathrm{Lim.}\, (a^x) = a^b$.

Stockler no considera solamente límites de variables sino también de funciones. De forma explícita establece la permutabilidad del límite con una función:

> *El límite de cualquier función Fx de una variable x que es capaz de (tiene) límite, es igual al valor homólogo por la función de su límite.*

Stockler explica el uso del símbolo “Lim.” para representar límites y lo emplea de forma operativa para permutar límites. Por ejemplo, si $b = \mathrm{Lim.}\, x$ y a es constante, $\mathrm{Lim.}\,(a^x) = a^b$.

Stockler no considera solamente límites de variables sino también de funciones. De forma explícita establece la permutabilidad del límite con una función:

> *El límite de cualquier función Fx de una variable x que es capaz de (tiene) límite, es igual al valor homólogo por la función de su límite.*

Simbólicamente, Stockler expresa el teorema como sigue: Para $a = \mathrm{Lim.}\, x$, se sigue que $\mathrm{Lim.}\, Fx = Fa$.

A principios del siglo XIX, parecía cada vez más necesario consolidar la enorme cantidad de resultados que ya se habían obtenido usando las técnicas precariamente fundamentadas del cálculo. Había llegado el momento en que se disponía de las herramientas necesarias para desvelar las sutilezas del concepto de límite, cuya lenta y trabajosa evolución a lo largo del siglo XVIII acabamos de ver. Lo que se necesitaba era dar definiciones precisas, simbólicas y operativas, que no estuvieran basadas en intuiciones geométricas ni cinemáticas.

A principios del siglo XIX, parecía cada vez más necesario consolidar la enorme cantidad de resultados que ya se habían obtenido usando las técnicas precariamente fundamentadas del cálculo. Había llegado el momento en que se disponía de las herramientas necesarias para desvelar las sutilezas del concepto de límite, cuya lenta y trabajosa evolución a lo largo del siglo XVIII acabamos de ver. Lo que se necesitaba era dar definiciones precisas, simbólicas y operativas, que no estuvieran basadas en intuiciones geométricas ni cinemáticas.

Para ello, había que precisar las expresiones vagas que solían usarse, al estilo de "aproximarse más que una cantidad dada, por pequeña que ésta sea", y dotarlas de un significado matemático preciso que pudiera ser usado para dar demostraciones. Lo que se necesitaba era traducir las definiciones verbales de límite mediante el álgebra de desigualdades que en esa época ya se había desarrollado. Esto puede parecer fácil visto desde nuestra perspectiva actual, pero no lo era en absoluto.

Si recuerdas la actual definición de límite de una función en un punto, puedes comprobar lo abstracta que es: no queda nada en ella de la intuición inicial con la que Newton imaginaba sus “razones últimas”. Es una definición “estática” y todo en ella es aritmética: valor absoluto, desigualdades. . . ¡no contiene ninguna igualdad! Ganamos rigor a costa de la intuición.

Si recuerdas la actual definición de límite de una función en un punto, puedes comprobar lo abstracta que es: no queda nada en ella de la intuición inicial con la que Newton imaginaba sus “razones últimas”. Es una definición “estática” y todo en ella es aritmética: valor absoluto, desigualdades. . . ¡no contiene ninguna igualdad! Ganamos rigor a costa de la intuición.

Quien realizó la hazaña de fundamentar con rigor el cálculo sobre el concepto de límite fue Augustin - Louis Cauchy (1789 - 1857).

Si recuerdas la actual definición de límite de una función en un punto, puedes comprobar lo abstracta que es: no queda nada en ella de la intuición inicial con la que Newton imaginaba sus "razones últimas". Es una definición "estática" y todo en ella es aritmética: valor absoluto, desigualdades. . . ¡no contiene ninguna igualdad! Ganamos rigor a costa de la intuición.

Quien realizó la hazaña de fundamentar con rigor el cálculo sobre el concepto de límite fue Augustin - Louis Cauchy (1789 - 1857).

Nos vamos a centrar aquí exclusivamente en este aspecto de su obra, de la que volveremos a ocuparnos más adelante. Conviene, no obstante decir, que hay interpretaciones muy distintas de la obra de Cauchy. En particular, se ha escrito mucho sobre el uso que Cauchy hace de los infinitésimos.

Figura. Cauchy

Algunos autores afirman que Cauchy, por su propia voluntad, nunca hubiera dejado entrar a los infinitésimos en sus libros, pero que se vio en la necesidad de hacerlo por la presión del entorno de l'École Polytechnique donde desempeñaba su labor docente. De todas formas, su concepto de infinitésimo, como veremos enseguida, no es el de una cantidad no nula pero infinitamente pequeña. En su *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* (1821), Cauchy empieza exponiendo su concepto de número, de cantidad y seguidamente, en la página 19, aparecen las siguientes definiciones.

Se llama cantidad *variable* aquella que se considera debe recibir sucesivamente varios valores diferentes unos de otros.[. . .] Cuando los valores sucesivamente atribuidos a una misma variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que acaban por diferir de él tan poco como se quiera, éste último es llamado el *límite* de todos los otros.

Se llama cantidad *variable* aquella que se considera debe recibir sucesivamente varios valores diferentes unos de otros.[. . .] Cuando los valores sucesivamente atribuidos a una misma variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que acaban por diferir de él tan poco como se quiera, éste último es llamado el *límite* de todos los otros.

[. . .] Cuando los valores numéricos (valores absolutos) sucesivos de una misma variable decrecen indefinidamente, de manera que quedan por debajo de todo número dado, esta variable recibe el nombre de *infinitésimo* o de cantidad *infinitamente pequeña*. Una variable de esta naturaleza tiene por límite a cero.

Se llama cantidad *variable* aquella que se considera debe recibir sucesivamente varios valores diferentes unos de otros.[. . .] Cuando los valores sucesivamente atribuidos a una misma variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que acaban por diferir de él tan poco como se quiera, éste último es llamado el *límite* de todos los otros.

[. . .] Cuando los valores numéricos (valores absolutos) sucesivos de una misma variable decrecen indefinidamente, de manera que quedan por debajo de todo número dado, esta variable recibe el nombre de *infinitésimo* o de cantidad *infinitamente pequeña*. Una variable de esta naturaleza tiene por límite a cero.

Cuando los valores numéricos (valores absolutos) sucesivos de una misma variable crecen más y más, de manera que permanecen por encima de todo número dado, se dice que esta variable tiene por límite el *infinito positivo*, indicado por el signo ∞, cuando se trata de una variable positiva, y el *infinito negativo*, indicado por la notación $-\infty$, cuando se trata de una variable negativa.

Llama la atención en esta definición la idea repetida de “sucesivos valores” que algunos autores interpretan como si Cauchy considerara a las cantidades variables como sucesiones. Aunque sigue siendo una definición verbal, es mucho más precisa que las anteriores y lo importante es la forma en que Cauchy la interpreta por medio del álgebra de desigualdades. Podemos hacernos una idea de la forma de trabajar de Cauchy considerando el siguiente resultado que aparece en la página 54 del *Cours d’Analyse*.

Llama la atención en esta definición la idea repetida de “sucesivos valores” que algunos autores interpretan como si Cauchy considerara a las cantidades variables como sucesiones. Aunque sigue siendo una definición verbal, es mucho más precisa que las anteriores y lo importante es la forma en que Cauchy la interpreta por medio del álgebra de desigualdades. Podemos hacernos una idea de la forma de trabajar de Cauchy considerando el siguiente resultado que aparece en la página 54 del *Cours d'Analyse*.

Teorema (Cauchy - Cours D'Analyse, p.54). Si para valores crecientes de x, la diferencia

$$f(x+1)-f(x)$$

converge hacia un cierto límite k, la fracción

$$\frac{f(x)}{x}$$

convergerá al mismo tiempo hacia el mismo límite.

Demostración. Supongamos para empezar que la cantidad k tenga un valor finito, y designemos por ε un número tan pequeño como se quiera. Puesto que los valores crecientes de x hacen converger la diferencia

$$f(x+1)-f(x)$$

hacia el límite k, se podrá dar al número h un valor suficientemente grande para que, siendo x igual o mayor que h, la diferencia correspondiente esté constantemente comprendida entre los límites

$$k-\varepsilon, \qquad k+\varepsilon.$$

(*Este comienzo es impecable y nosotros lo haríamos exactamente igual. Con nuestras notaciones actuales, la hipótesis es que*

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x+1)-f(x)\big)=k.$$

Por tanto, dado $\varepsilon>0$*, existe* $h>0$ *tal que para todo* $x\geqslant h$ *se verifica que* $|f(x+1)-f(x)-k|<\varepsilon$*. Eso es exactamente lo que escribe Cauchy.*)

Supuesto esto, si se designa por n un número entero cualquiera, cada una de las cantidades

$$\begin{array}{l} f(h+1)-f(h) \\ f(h+2)-f(h+1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(h+n)-f(h+n-1) \end{array}$$

y, en consecuencia, su media aritmética, a saber

$$\frac{f(h+n)-f(h)}{n}$$

se encontrará comprendida entre los límites $k-\varepsilon$, $k+\varepsilon$.

Se tendrá pues

$$\frac{f(h+n)-f(h)}{n}=k+\alpha$$

siendo α una cantidad comprendida entre los límites $-\varepsilon$, $+\varepsilon$. Sea ahora

$$h+n=x$$

La ecuación precedente se convertirá en

$$\frac{f(x)-f(h)}{x-h}=k+\alpha, \tag{1}$$

y se concluirá

$$\begin{aligned} f(x) &= f(h)+(x-h)(k+\alpha) \\ \frac{f(x)}{x} &= \frac{f(h)}{x}+\left(1-\frac{h}{x}\right)(k+\alpha) \end{aligned} \tag{2}$$

(*Hasta aquí, nada que objetar. Todo es correcto.*)

Además, para hacer crecer indefinidamente el valor de x, será suficiente hacer crecer indefinidamente el número entero n sin cambiar el valor de h. Supongamos, en consecuencia, que en la ecuación (2) se considera h como una cantidad constante, y x como una cantidad variable que converge hacia el límite ∞. Las cantidades

$$\frac{f(h)}{x}, \qquad \frac{h}{x},$$

encerradas en el segundo miembro, convergerán hacia el límite cero, y el propio segundo miembro hacia un límite de la forma

$$k + \alpha,$$

α estando siempre comprendida entre $-\varepsilon$ y $+\varepsilon$. Por consiguiente, la razón

$$\frac{f(x)}{x}$$

tendrá por límite una cantidad comprendida entre $k - \varepsilon$ y $k + \varepsilon$.

Debiendo subsistir esta conclusión, cualquiera que sea la pequeñez del número ε, resulta que el límite en cuestión será precisamente igual a la cantidad k. En otras palabras, se tendrá

$$\text{lím}\,\frac{f(x)}{x} = k = \text{lím}[f(x+1) - f(x)]. \qquad (3)$$

(Seguidamente, Cauchy pasa a considerar los casos en que $k = \infty$ y $k = -\infty$.)

Esta demostración es notable, por su rigor y también porque *no es correcta*. ¿Serías capaz de explicar a Cauchy dónde está el error en su razonamiento? Por supuesto, lo que interesa aquí es la forma en que Cauchy traduce los conceptos de límite por medio de desigualdades. El error es anecdótico, además, cuando Cauchy emplea este resultado lo hace siempre en casos en que la tesis es correcta; por ejemplo, para la función $\log x$,se tiene que $\lim_{x\to+\infty}\big(\log(x+1)-\log(x)\big)=0$ y, por tanto, $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\log x}{x}=0$ lo cual es correcto.

Contraejemplo. Considera la función $f : \mathbb{R}_o^+ \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{1 - x + E(x)}$$

Donde, como de costumbre, $E(x)$ es la parte entera de x.

Durante el siglo XVIII, el concepto de continuidad no había merecido nada más que una esporádica atención, y siempre había sido considerado desde un punto de vista filosófico, más como una ley de la naturaleza que como un concepto propiamente matemático. Generalmente la continuidad de una función se entendía en el sentido de Euler, y significaba que dicha función estaba definida por una única expresión analítica. En su *Cours D'Analyse*, Cauchy define el concepto de función continua y, lo que es notable, de función discontinua; y su definición es realmente muy minuciosa. Dice así:

Sea $f(x)$ una función de la variable x, y supongamos que, para cada valor de x comprendido entre ciertos límites dados, esta función admite constantemente un valor único y finito. Si, partiendo de un valor de x comprendido entre estos límites, se atribuye a la variable x un incremento infinitamente pequeño α, la función misma recibirá por incremento la diferencia

$$f(x+\alpha)-f(x)$$

que dependerá a la vez de la nueva variable α y del valor de x.

Sea $f(x)$ una función de la variable x, y supongamos que, para cada valor de x comprendido entre ciertos límites dados, esta función admite constantemente un valor único y finito. Si, partiendo de un valor de x comprendido entre estos límites, se atribuye a la variable x un incremento infinitamente pequeño α, la función misma recibirá por incremento la diferencia

$$f(x+\alpha)-f(x)$$

que dependerá a la vez de la nueva variable α y del valor de x.Dicho esto, la función $f(x)$ será, entre los dos límites asignados a la variable x, función *continua* de esta variable, si, para cada valor de x intermedio entre estos límites, el valor numérico (valor absoluto) de la diferencia

$$f(x+\alpha)-f(x)$$

decrece indefinidamente con el de α.

Sea $f(x)$ una función de la variable x, y supongamos que, para cada valor de x comprendido entre ciertos límites dados, esta función admite constantemente un valor único y finito. Si, partiendo de un valor de x comprendido entre estos límites, se atribuye a la variable x un incremento infinitamente pequeño α, la función misma recibirá por incremento la diferencia

$$f(x+\alpha)-f(x)$$

que dependerá a la vez de la nueva variable α y del valor de x.Dicho esto, la función $f(x)$ será, entre los dos límites asignados a la variable x, función *continua* de esta variable, si, para cada valor de x intermedio entre estos límites, el valor numérico (valor absoluto) de la diferencia

$$f(x+\alpha)-f(x)$$

decrece indefinidamente con el de α.En otras palabras, *la función $f(x)$ permanecerá continua con respecto a x entre los límites dados, si, entre estos límites un incremento infinitamente pequeño de la variable produce siempre un incremento infinitamente pequeño de la función*.

Sea $f(x)$ una función de la variable x, y supongamos que, para cada valor de x comprendido entre ciertos límites dados, esta función admite constantemente un valor único y finito. Si, partiendo de un valor de x comprendido entre estos límites, se atribuye a la variable x un incremento infinitamente pequeño α, la función misma recibirá por incremento la diferencia

$$f(x+\alpha)-f(x)$$

que dependerá a la vez de la nueva variable α y del valor de x.Dicho esto, la función $f(x)$ será, entre los dos límites asignados a la variable x, función *continua* de esta variable, si, para cada valor de x intermedio entre estos límites, el valor numérico (valor absoluto) de la diferencia

$$f(x+\alpha)-f(x)$$

decrece indefinidamente con el de α.En otras palabras, *la función $f(x)$ permanecerá continua con respecto a x entre los límites dados, si, entre estos límites un incremento infinitamente pequeño de la variable produce siempre un incremento infinitamente pequeño de la función*.

Se dice también que la función $f(x)$ es, en un entorno de un valor particular atribuido a la variable x, función continua de esta variable, siempre que ella sea continua entre dos límites de x, por cercanos que estén, que encierren al valor considerado. Finalmente, cuando una función deja de ser continua en el entorno de un valor particular de la variable x, se dice entonces que ella se hace *discontinua* y que para este valor particular de x hay una *solución de continuidad*.

Se dice también que la función $f(x)$ es, en un entorno de un valor particular atribuido a la variable x, función continua de esta variable, siempre que ella sea continua entre dos límites de x, por cercanos que estén, que encierren al valor considerado. Finalmente, cuando una función deja de ser continua en el entorno de un valor particular de la variable x, se dice entonces que ella se hace *discontinua* y que para este valor particular de x hay una *solución de continuidad*.

Cauchy da realmente dos definiciones; primero define lo que nosotros llamaríamos “continuidad en un intervalo” y, después, la continuidad puntual. La primera definición ha sido interpretada en el sentido de que lo que Cauchy entiende por continuidad es lo que ahora llamamos “continuidad uniforme”.

Se dice también que la función $f(x)$ es, en un entorno de un valor particular atribuido a la variable x, función continua de esta variable, siempre que ella sea continua entre dos límites de x, por cercanos que estén, que encierren al valor considerado. Finalmente, cuando una función deja de ser continua en el entorno de un valor particular de la variable x, se dice entonces que ella se hace *discontinua* y que para este valor particular de x hay una *solución de continuidad*.

Cauchy da realmente dos definiciones; primero define lo que nosotros llamaríamos “continuidad en un intervalo” y, después, la continuidad puntual. La primera definición ha sido interpretada en el sentido de que lo que Cauchy entiende por continuidad es lo que ahora llamamos “continuidad uniforme”.

Seguidamente a esta definición, Cauchy pasa a estudiar la continuidad de las funciones elementales, considerando en cada caso, los límites entre los que cada función es continua. Después demuestra el teorema de los valores intermedios (teorema de Bolzano) del cual da dos demostraciones. Una que se apoya de forma decisiva en la intuición geométrica y, en una nota al final del texto, otra, que él califica de “puramente analítica”, que consiste en el método de bisección, en la que Cauchy usa, sin demostración ni comentario, que una sucesión monótona acotada es convergente, propiedad que equivale a la complitud del sistema de los números reales.

El innovador trabajo de Bolzano

Figura. Bolzano

Es obligado citar a Bernhard Bolzano (1781 - 1848), matemático, lógico y filósofo, profesor en la Universidad de su ciudad natal, Praga, desde 1805 a 1820. Bolzano, cuyas obras completas comprenderán, cuando terminen de editarse, alrededor de 140 volúmenes, fue un innovador en todos los campos que trabajó. En sus trabajos matemáticos anticipó muchos de los conceptos que posteriormente redescubrieron y desarrollaron matemáticos como Cauchy, Weierstrass o Cantor. Debido a su relativo aislamiento en la ciudad de Praga, en una época en la que el centro de toda la producción matemática estaba en París, la obra matemática de Bolzano fue poco conocida y no tuvo la influencia que merecía por su rigor y profundidad.

Por lo que a la continuidad de una función se refiere, Bolzano publicó en 1817 un pequeño libro de 60 páginas *Purely analytic proof of the theorem that between any two values which give results of opposite sign there lies at least one real root of the equation*, en el que, entre otras cosas, demuestra el teorema que ahora lleva su nombre. Bolzano empieza razonando que las demostraciones conocidas de ese teorema eran inapropiadas. La claridad de ideas con que se expresa es muy llamativa. Escribe Bolzano:

No obstante, un examen más cuidadoso muestra muy pronto que ninguna de estas pruebas puede considerarse adecuada.

No obstante, un examen más cuidadoso muestra muy pronto que ninguna de estas pruebas puede considerarse adecuada.

I. El tipo de demostración más usual depende de una verdad pedida en préstamo a la geometría, a saber, que toda línea continua de curvatura simple cuyas ordenadas son primero positivas y después negativas (o recíprocamente) necesariamente debe intersecar en algún lugar al eje de abscisas en un punto comprendido entre aquellas ordenadas. Ciertamente, nada hay que objetar respecto a la corrección, ni tampoco a la obviedad, de esta proposición geométrica. Pero está claro que es una intolerable ofensa contra el método correcto, deducir verdades de las matemáticas puras (o generales, i.e. aritmética, álgebra, análisis) a partir de consideraciones que pertenecen simplemente a una parte aplicada (o especial), a saber, la geometría.

No obstante, un examen más cuidadoso muestra muy pronto que ninguna de estas pruebas puede considerarse adecuada.

I. El tipo de demostración más usual depende de una verdad pedida en préstamo a la geometría, a saber, que toda línea continua de curvatura simple cuyas ordenadas son primero positivas y después negativas (o recíprocamente) necesariamente debe intersecar en algún lugar al eje de abscisas en un punto comprendido entre aquellas ordenadas. Ciertamente, nada hay que objetar respecto a la corrección, ni tampoco a la obviedad, de esta proposición geométrica. Pero está claro que es una intolerable ofensa contra el método correcto, deducir verdades de las matemáticas puras (o generales, i.e. aritmética, álgebra, análisis) a partir de consideraciones que pertenecen simplemente a una parte aplicada (o especial), a saber, la geometría.

[...] Consideremos ahora la razón objetiva por la que una línea en las circunstancias antes mencionadas interseca el eje de abscisas. Sin duda, todo el mundo verá enseguida que esta razón descansa en nada más que en el asentimiento general, como consecuencia del cual toda función continua de x que sea positiva para algún valor de x, y negativa para otro, debe ser cero para algún valor intermedio de x. Y ésta es, precisamente, la verdad que debe ser probada.

II. No menos reprobable es la demostración que algunos han construido a partir del concepto de la continuidad de una función con la inclusión de los conceptos de tiempo y movimiento. [...] Esto es adicionalmente ilustrado por el ejemplo del movimiento de dos cuerpos, uno de los cuales está inicialmente detrás del otro y posteriormente delante del otro. Necesariamente se deduce que en un tiempo debe haber estado al lado del otro. Nadie negará que los conceptos de tiempo y movimiento son tan extraños a la matemática general como el concepto de espacio. No obstante, si estos conceptos fueran introducidos solamente por motivos de claridad, no tendríamos nada en contra de ello. [...] Por tanto, debe observarse que no consideramos que los ejemplos y aplicaciones disminuyan en lo más mínimo la perfección de una exposición científica. De otra manera, estrictamente exigimos sólo esto: que los ejemplos nunca sean empleados como argumentos en lugar de las demostraciones, y que la esencia de una deducción nunca esté basada sobre el uso meramente metafórico de frases o sobre sus ideas relacionadas, de forma que la deducción misma quedaría vacía tan pronto como éstas fueran cambiadas.

Es difícil expresarse con más claridad que como lo hace Bolzano. Su definición de continuidad, en el citado trabajo, es como sigue:

> *Una función $f(x)$ varía según la ley de continuidad para todos los valores de x dentro o fuera de ciertos límites, significa exactamente que: si x es algún tal valor, la diferencia $f(x+\omega)-f(x)$ puede ser hecha más pequeña que cualquier cantidad dada, supuesto que ω puede ser tomado tan pequeño como queramos.*

Es difícil expresarse con más claridad que como lo hace Bolzano. Su definición de continuidad, en el citado trabajo, es como sigue:

> *Una función $f(x)$ varía según la ley de continuidad para todos los valores de x dentro o fuera de ciertos límites, significa exactamente que: si x es algún tal valor, la diferencia $f(x+\omega)-f(x)$ puede ser hecha más pequeña que cualquier cantidad dada, supuesto que ω puede ser tomado tan pequeño como queramos.*

Seguidamente, Bolzano establece un teorema previo cuyo asombroso enunciado es como sigue:

Es difícil expresarse con más claridad que como lo hace Bolzano. Su definición de continuidad, en el citado trabajo, es como sigue:

> *Una función $f(x)$ varía según la ley de continuidad para todos los valores de x dentro o fuera de ciertos límites, significa exactamente que: si x es algún tal valor, la diferencia $f(x+\omega)-f(x)$ puede ser hecha más pequeña que cualquier cantidad dada, supuesto que ω puede ser tomado tan pequeño como queramos.*

Seguidamente, Bolzano establece un teorema previo cuyo asombroso enunciado es como sigue:

> *Si una propiedad M no pertenece a todos los valores de una variable x, pero sí pertenecen todos los valores que son menores que un cierto u, entonces existe siempre una cantidad U que es la mayor de aquellas de las cuales puede afirmarse que toda más pequeña x tiene la propiedad M.*

Es difícil expresarse con más claridad que como lo hace Bolzano. Su definición de continuidad, en el citado trabajo, es como sigue:

> *Una función $f(x)$ varía según la ley de continuidad para todos los valores de x dentro o fuera de ciertos límites, significa exactamente que: si x es algún tal valor, la diferencia $f(x+\omega)-f(x)$ puede ser hecha más pequeña que cualquier cantidad dada, supuesto que ω puede ser tomado tan pequeño como queramos.*

Seguidamente, Bolzano establece un teorema previo cuyo asombroso enunciado es como sigue:

> *Si una propiedad M no pertenece a todos los valores de una variable x, pero sí pertenecen todos los valores que son menores que un cierto u, entonces existe siempre una cantidad U que es la mayor de aquellas de las cuales puede afirmarse que toda más pequeña x tiene la propiedad M.*

Comprendes por qué califico de "asombroso" ese enunciado, ¿verdad?

Es difícil expresarse con más claridad que como lo hace Bolzano. Su definición de continuidad, en el citado trabajo, es como sigue:

> *Una función $f(x)$ varía según la ley de continuidad para todos los valores de x dentro o fuera de ciertos límites, significa exactamente que: si x es algún tal valor, la diferencia $f(x+\omega)-f(x)$ puede ser hecha más pequeña que cualquier cantidad dada, supuesto que ω puede ser tomado tan pequeño como queramos.*

Seguidamente, Bolzano establece un teorema previo cuyo asombroso enunciado es como sigue:

> *Si una propiedad M no pertenece a todos los valores de una variable x, pero sí pertenecen todos los valores que son menores que un cierto u, entonces existe siempre una cantidad U que es la mayor de aquellas de las cuales puede afirmarse que toda más pequeña x tiene la propiedad M.*

Comprendes por qué califico de "asombroso" ese enunciado, ¿verdad?¡Es la propiedad de extremo inferior!¡En el año 1817, 55 años antes de que Dedekind y Cantor publicaran sus teorías de los números reales!

Weierstrass nos dio los $\varepsilon - \delta$

Una característica de los textos citados de Cauchy es que en ellos no hay ni una sola figura. Cauchy liberó al cálculo de sus ataduras geométricas, aunque todavía sus definiciones contenían términos imprecisos como “tan pequeño como queramos” y “disminuir indefinidamente hasta converger al límite cero”, o ideas de movimiento como “variable que se acerca a un límite” por no hablar de sus “infinitamente pequeños”. Para seguir avanzando era necesario acabar de una vez con las distinciones entre número y cantidad. Los números reales todavía eran considerados geométricamente y no se habían establecido sus propiedades de forma explícita. El cero y los números negativos eran vistos aún por muchos matemáticos como algo de naturaleza diferente a los números positivos.

Figura. Weierstrass

En definitiva, debía concretarse el significado de expresiones como “cantidad variable” y “variable continua”. También era preciso separar la idea de función de su representación analítica concreta, lo cual, como ya vimos, fue hecho por Dirichlet en 1837 con su definición general de función como correspondencia arbitraria. Finalmente, pero no menos importante, estaban las cuestiones referentes a la convergencia de sucesiones y series numéricas y funcionales, aún mal comprendidas en la época de Cauchy, de las que nos ocuparemos en otro lugar.

En los cincuenta años que van de 1830 a 1880 se lograron desentrañar todas estas cuestiones fundamentales gracias, principalmente, a los trabajos de Dirichlet, Riemann, Weierstrass, Dedekind y Cantor. Ya conocemos una parte de este complejo proceso, la que culmina en 1872 con la fundamentación del sistema de los números reales por Dedekind y Cantor.

En los cincuenta años que van de 1830 a 1880 se lograron desentrañar todas estas cuestiones fundamentales gracias, principalmente, a los trabajos de Dirichlet, Riemann, Weierstrass, Dedekind y Cantor. Ya conocemos una parte de este complejo proceso, la que culmina en 1872 con la fundamentación del sistema de los números reales por Dedekind y Cantor.

Fue Karl Weierstrass (1815 - 1897) quien llevó a sus últimas consecuencias el proceso de "aritmetización del Análisis".

En los cincuenta años que van de 1830 a 1880 se lograron desentrañar todas estas cuestiones fundamentales gracias, principalmente, a los trabajos de Dirichlet, Riemann, Weierstrass, Dedekind y Cantor. Ya conocemos una parte de este complejo proceso, la que culmina en 1872 con la fundamentación del sistema de los números reales por Dedekind y Cantor.

Fue Karl Weierstrass (1815 - 1897) quien llevó a sus últimas consecuencias el proceso de "aritmetización del Análisis".Weierstrass era un desconocido profesor de instituto, cuando en 1854 publicó un trabajo sobre las funciones abelianas que causó sensación en la comunidad matemática. Poco después, en 1856, Weierstrass ya era profesor de la Universidad de Berlín. Los cursos que Weierstrass impartió en Berlín durante más de treinta años atrajeron a numerosos matemáticos de toda europa. Discípulos suyos fueron George Cantor (1845 - 1918), Sonya Kovalevsky (1850 - 1891), Max Planck (1858 - 1947) y David Hilbert (1862 - 1943).

En los cincuenta años que van de 1830 a 1880 se lograron desentrañar todas estas cuestiones fundamentales gracias, principalmente, a los trabajos de Dirichlet, Riemann, Weierstrass, Dedekind y Cantor. Ya conocemos una parte de este complejo proceso, la que culmina en 1872 con la fundamentación del sistema de los números reales por Dedekind y Cantor.

Fue Karl Weierstrass (1815 - 1897) quien llevó a sus últimas consecuencias el proceso de "aritmetización del Análisis".Weierstrass era un desconocido profesor de instituto, cuando en 1854 publicó un trabajo sobre las funciones abelianas que causó sensación en la comunidad matemática. Poco después, en 1856, Weierstrass ya era profesor de la Universidad de Berlín. Los cursos que Weierstrass impartió en Berlín durante más de treinta años atrajeron a numerosos matemáticos de toda europa. Discípulos suyos fueron George Cantor (1845 - 1918), Sonya Kovalevsky (1850 - 1891), Max Planck (1858 - 1947) y David Hilbert (1862 - 1943).

Weierstrass estaba convencido de que el Análisis debía ser liberado de los razonamientos geométricos y de los conceptos intuitivos de espacio, tiempo y movimiento y debía ser fundamentado sobre los enteros positivos. Acometió la tarea de revisar radicalmente los conceptos fundamentales del Análisis y a este fin dedicó algunos de sus cursos. Entre otras cosas, desarrolló en ellos una teoría aritmética de los números reales parecida a la de Cantor.

Aunque Weierstrass no publicó mucho, su influencia fue enorme y sus conferencias magistrales fueron difundidas por toda Europa por sus numerosos alumnos. Weierstrass es considerado como el más grande analista del último tercio del siglo XIX y se le ha llamado “el padre del análisis moderno”. Más adelante tendremos ocasión de exponer algunas de sus contribuciones.

Aunque Weierstrass no publicó mucho, su influencia fue enorme y sus conferencias magistrales fueron difundidas por toda Europa por sus numerosos alumnos. Weierstrass es considerado como el más grande analista del último tercio del siglo XIX y se le ha llamado "el padre del análisis moderno". Más adelante tendremos ocasión de exponer algunas de sus contribuciones.

Por lo que al concepto de límite funcional se refiere, Weierstrass tradujo por medio de desigualdades y de valores absolutos las definiciones verbales de límite y de continuidad dadas por Cauchy y Bolzano. Para Weierstrass, una variable solamente es un símbolo que sirve para designar cualquier elemento del conjunto de valores que se le pueden atribuir. Una variable continua es aquella cuyo conjunto de valores no tiene puntos aislados. La definición de límite dada por Weierstrass, tal como la recogió en sus notas el matemático H.E. Heine (1821 - 1881) es la siguiente:

> *Se dice que L es el límite de una función $f(x)$ para $x = x_0$ si, dado cualquier ε, existe un δ_0 tal que para $0 < \delta < \delta_0$, la diferencia $f(x_0 \pm \delta) - L$ es menor en valor absoluto que ε.*

Cuando una teoría ha sido desarrollada, llega el momento del rigor. Así el concepto de límite, fundamental en cálculo porque en él se basan los de continuidad, derivada, integral y los distintos tipos de convergencia, y es el concepto que confiere al cálculo su característica distintiva, solamente pudo ser expresado de forma rigurosa (según nuestros criterios actuales) en el último tercio del siglo XIX, después de haberse estado usando, de forma más o menos disfrazada por los infinitésimos y otros conceptos afines como el movimiento, durante doscientos años. Curiosamente, la letra griega ε, que usaba Cauchy con un significado de "error", se ha convertido en el paradigma de la precisión en nuestras actuales definiciones heredadas de Weierstrass.

Cuando una teoría ha sido desarrollada, llega el momento del rigor. Así el concepto de límite, fundamental en cálculo porque en él se basan los de continuidad, derivada, integral y los distintos tipos de convergencia, y es el concepto que confiere al cálculo su característica distintiva, solamente pudo ser expresado de forma rigurosa (según nuestros criterios actuales) en el último tercio del siglo XIX, después de haberse estado usando, de forma más o menos disfrazada por los infinitésimos y otros conceptos afines como el movimiento, durante doscientos años. Curiosamente, la letra griega ε, que usaba Cauchy con un significado de "error", se ha convertido en el paradigma de la precisión en nuestras actuales definiciones heredadas de Weierstrass.

La flechita en la notación para límites, $\lim_{x \to x_0} f(x)$, fue introducida por G.H. Hardy (1877 - 1947) en su notable libro *A Course of Pure Mathematics* (1908).